16/4/2018

- $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\}$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ⇝ Ομάδα του Klein
- $\mathbb{Z}_4 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\} = \langle [1]_4 \rangle$ ⇝ Κυκλική

▶ Ορισμός Μία απεικόνιση $\varphi: G \longrightarrow G'$, μιας ομάδας G σε μία ομάδα G', λέγεται ομομορφισμός ομάδων ή ομομορφισμός, αν:

$$\boxed{\varphi(\alpha * b) = \varphi(\alpha) * \varphi(b)}, \forall \alpha, b \in G$$

πράξη της G

πράξη της G'

▶ Παραδείγματα • G και G' ομάδες.

- Έστω απεικόνιση $\varphi: G \longrightarrow G'$, τ/ω:

$$\boxed{\varphi(g) = e'}, \forall g \in G$$

- Έχω ότι: $\boxed{\varphi(\alpha b) = e'}$

και: $\varphi(\alpha) \cdot \varphi(b) = e' \cdot e' = e'$, $\forall \alpha, b \in G$.

- Άρα $\varphi(\alpha b) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(b)$ ⇝ φ: ομομορφισμός

• $S_4 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_5 \times S_3 \Rightarrow \boxed{\varphi(g) = e' = (\bar{0}_5, I_3)}$

• Άρα: φ: ομομορφισμός!!!

Γραμμική Άλγεβρα

• Έστω V_1 και V_2 δύο K-διανυσματικοί χώροι και $f: V_1 \to V_2$ γραμμική απεικόνιση.

⚠ $(V_1,+)$ και $(V_2,+)$ αβελιανές ομάδες, διότι πληρούν τις ιδιότητες μίας μεταθετικής ομάδας, ως διανυσματικοί χώροι!!!

• Προφανώς, αφού η f: γραμμική απεικόνιση, συνεπώς, $\forall \vec{x},\vec{y} \in V_1$, έχουμε: $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

• Άρα: $\boxed{f: \text{ομομορφισμός}}$

• $(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^+,\cdot)$ με $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$

ομάδα

• Για $\varphi(x) = a^x$, έχω:

$\forall x,y \in (\mathbb{R},+)$: $\varphi(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$

• Άρα η φ είναι ομομορφισμός!!!

• $(\mathbb{R}^+, \cdot) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, +)$

• Η απεικόνιση : $f(x) = \ln(x)$, $\forall x \in (\mathbb{R}^+, \cdot)$,

είναι ομομορφισμός ομάδων, καθώς:

$$f(x \cdot y) = \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y), \forall x, y \in (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

• $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_7, +)$ $\boxed{\text{Και γενικά για } (\mathbb{Z}_n, +)}$

• Προφανώς, η απεικόνιση $\varphi(n) = [n]_7$ είναι

ομομορφισμός ομάδων, καθώς:

$$\varphi(\alpha + b) = [\alpha + b]_7 = [\alpha]_7 + [b]_7 = \varphi(\alpha) + \varphi(b), \forall \alpha, b \in (\mathbb{Z}, +)$$

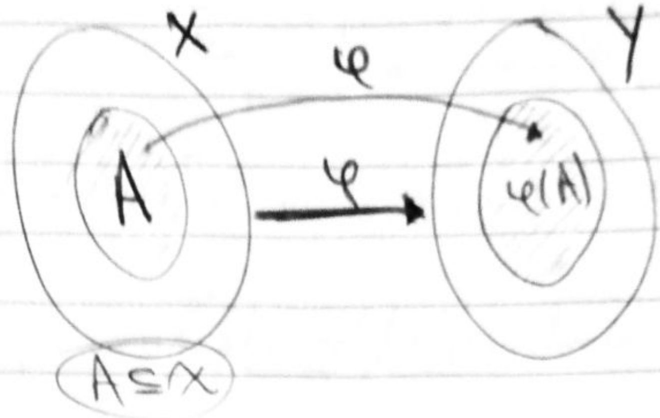
• $GL_n(\mathbb{R}^{n \times n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.

• $(GL_n(\mathbb{R}^{n \times n}), \cdot) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^*, \cdot)$

• Προφανώς, η $\varphi(A) = \det A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι

ομομορφισμός, καθώς:

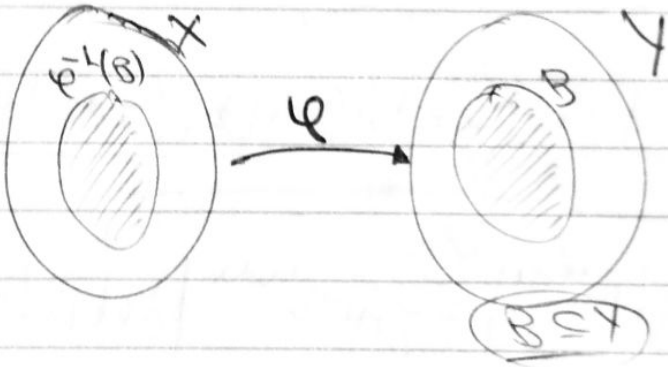
$$\varphi(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B), \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$



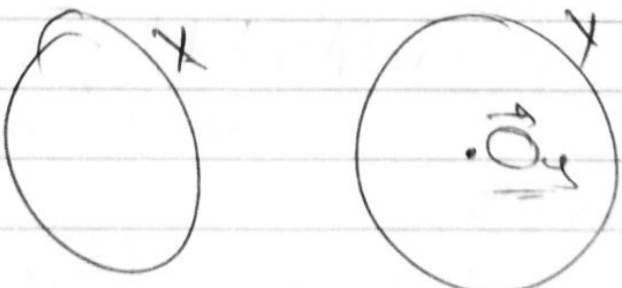
- $\varphi(A)=\{\varphi(\alpha)\mid \alpha\in A\}=\{y\in Y\mid \exists\, \alpha\in A \text{ τω}: y=\varphi(\alpha)\}$

  → Εικόνα του A μέσω της φ

- $\varphi(X)=\operatorname{Im}\varphi$ → Εικόνα της φ.



- $\varphi^{-1}(B)=\{\alpha\in X\mid \varphi(\alpha)\in B\}$



- $\varphi^{-1}(\vec{0}_Y)=\{\alpha\in X\mid \varphi(\alpha)=\vec{0}_Y\}=\ker\varphi$

  → Πυρήνας της φ!

Θεώρημα: Έστω φ ένας ομομορφισμός ομάδων μίας ομάδας G σε μία ομάδα G'.

- Αν e είναι το ταυτοτικό της G, τότε $\varphi(e)$ είναι το ταυτοτικό της G'
- Αν $\alpha \in G$, τότε $\varphi(\alpha^{-1}) = (\varphi(\alpha))^{-1}$
- Αν $H \leq G$, τότε: $\varphi(H) \leq G'$
- Αν $K' \leq G'$, τότε: $\varphi^{-1}(K') \leq G$

Απόδειξη:

- $\varphi(e * e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e) \Rightarrow \varphi(e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e) \Rightarrow$

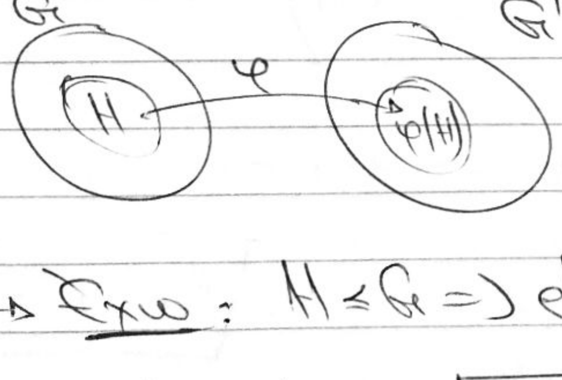
$$\Rightarrow \varphi(e) \cdot e' = \varphi(e) \cdot \varphi(e) \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{αριστερός νόμος}} \boxed{e' = \varphi(e)}$$

- $\varphi(\alpha \cdot \alpha^{-1}) = \varphi(e) = e'$

$\quad\;\; \| $

$\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\alpha^{-1})$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\alpha^{-1}) = e' \xrightarrow[\text{αντιστρόφου}]{\text{μοναδικότητα}} \boxed{\varphi(\alpha^{-1}) = (\varphi(\alpha))^{-1}}$$

- 

→ **Έχω**: $H \leq G \Rightarrow e' = \varphi(e)$ και $e \in H \Rightarrow$

$$\Rightarrow e' \in \varphi(H) \Rightarrow \boxed{\varphi(H) \neq \emptyset}$$

→ **Επίσης**: Για $\alpha, b \in \varphi(H)$, έχω: $\begin{cases} \alpha = \varphi(h_1), h_1 \in H \\ b = \varphi(h_2), h_2 \in H \end{cases}$

Άρα: $\alpha * b^{-1} = \varphi(h_1) \cdot (\varphi(h_2))^{-1} = \varphi(h_1) \cdot \varphi(h_2^{-1}) = \varphi(h_1 \cdot h_2^{-1})$

$\in \varphi(H)$

Συνεπώς, αν $H \leq G$, τότε $\varphi(H) \leq G'$!!!

• Καθώς $K' \leq G'$, έχω:

$e \in G \Rightarrow \varphi(e) = e' \in K' \Rightarrow e = \varphi^{-1}(e') \in \varphi^{-1}(K') \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi^{-1}(K') \neq \emptyset}$

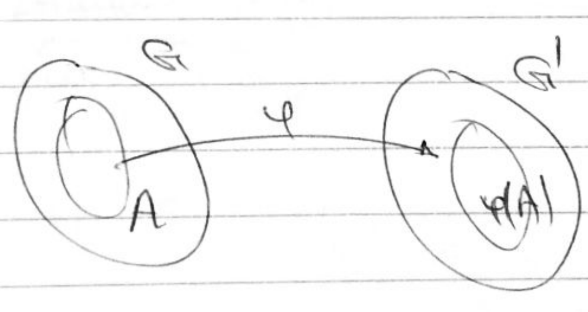
Έστω $x, y \in \varphi^{-1}(K') \Rightarrow \varphi(x) \in K'$ και $\varphi(y) \in K'$.

Έχω: $\varphi(x y^{-1}) = \varphi(x)\cdot\varphi(y^{-1}) = \varphi(x)\cdot(\varphi(y))^{-1}$

$= \varphi(x)\cdot(\varphi(y))^{-1} \in K' \Rightarrow \boxed{x y^{-1} \in \varphi^{-1}(K')}$

Άρα: $\boxed{\varphi^{-1}(K') \leq G}$!!!

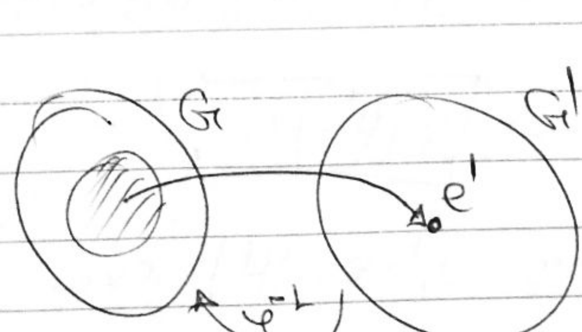
⚠



• Προφανώς, αν $G \leq G \Rightarrow \varphi(G) \leq G' \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}\varphi \leq G'}$.

⚠



• $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{e'\}) \leq G$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Ker}\varphi \leq G}$

(απόρροια του ομομορφισμού!)

Ορισμός | Έστω φ ομομορφισμός από την ομάδα G, στην ομάδα G'. Το σύνολο:

- $Ker\varphi = \varphi^{-1}(\{e'\}) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$,

, ονομάζεται πυρήνας του ομομορφισμού φ!

Άσκηση | Βρείτε τον πυρήνα του ομομορφισμού $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$, με $\varphi(n) = [n]_7$

- Εξ'ορισμού:

$$Ker\varphi = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = [0]_7\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid [n]_7 = [0]_7\} =$$

$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \bmod 7\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 7 \mid n\} = 7\mathbb{Z}$$

- Προφανώς: $Im\varphi \leq \mathbb{Z}_7 \Rightarrow \boxed{Im\varphi = \mathbb{Z}_7}$,

διότι, για $\alpha \in Im\varphi \Rightarrow \varphi(\alpha) = [\alpha]_7 \in \mathbb{Z}_7$

⚠ Δεν είναι "1-1"

Άσκηση | Είναι η $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ομομορφισμός? Βρείτε την εικόνα και τον πυρήνα της φ. Με $\varphi(n) = 11n$

- Λύση:
  - Έχω: $\varphi(\alpha+\beta) = 11(\alpha+\beta) = 11\alpha + 11\beta = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$
  - Άρα φ: ομομορφισμός

- $\mathrm{Ker}\varphi = \{u \in \mathbb{Z} \mid \varphi(u) = 0 = e\} = \{u \in \mathbb{Z} \mid 11u = 0\} = \{0\}$
- $\mathrm{Im}\,\mathbb{Z} = \{\varphi(u) \mid u \in \mathbb{Z}\} = \{11u \mid u \in \mathbb{Z}\} = 11\mathbb{Z}$
  - Παρ' όλο που είναι "1-1" δεν είναι επί!!!

Θεώρημα: Ο ομομορφισμός $\varphi: G \to G'$ είναι "1-1", αν και μόνο αν: $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$, όπου e είναι το ταυτοτικό της G.

Απόδειξη: $\Longrightarrow$ φ: "1-1"

Έχω: $\mathrm{Ker}\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\} = \{g \in G \mid \varphi(g) = \varphi(e)\}$
$\overset{\varphi: \text{"1-1"}}{=} \{g \in G \mid g = e\} = \{e\}$

$\Longleftarrow$ $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$

- Έστω $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a) \cdot (\varphi(b))^{-1} = \underbrace{\varphi(b) \cdot (\varphi(b))^{-1}}_{e'} = e' \Rightarrow$

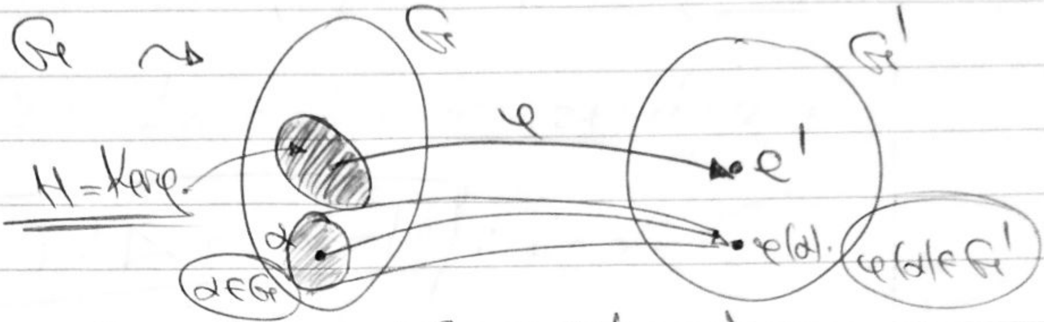
$\Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = e' \Rightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = e' \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow a \cdot b^{-1} = e \Rightarrow \boxed{a = b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$: "1-1" !!!

▶ Ορισμός: Ο ομομορφισμός $\varphi: G \to G'$ είναι επί, αν και μόνο αν: $Im\varphi = \varphi(G) = G'$.

• $H = Ker\varphi \leq G$ ⤳



• $Ker\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\} = \varphi^{-1}(\{e'\})$

▶ Πρόταση • Θα αποδειχθεί ότι: $\boxed{\varphi^{-1}\{\varphi(\alpha)\} = \alpha H = H\alpha}$.

$\Downarrow$ $H = Ker\varphi \trianglelefteq G$

• Έστω: $x \in \alpha H \Rightarrow \boxed{x = \alpha \cdot h}$, με $h \in H = Ker\varphi$

• Έχω: $\varphi(x) = \varphi(\alpha \cdot h) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(h) = \varphi(\alpha) \cdot e'$

$= \varphi(\alpha) \Rightarrow \boxed{x \in \varphi^{-1}(\varphi(\alpha))} \Rightarrow \boxed{\alpha H \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(\alpha))}$ (1)

• Έστω: $x \in \varphi^{-1}(\{\varphi(\alpha)\}) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi(\alpha))^{-1} \cdot \varphi(x) = (\varphi(\alpha))^{-1} \cdot \varphi(\alpha) = e' \Rightarrow \varphi(\alpha^{-1}) \cdot \varphi(x) = e'$

$\Rightarrow \varphi(\alpha^{-1} \cdot x) = e' \Rightarrow \alpha^{-1}x \in Ker\varphi = H \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^{-1} \cdot x = h \in H \Rightarrow x = \alpha h \Rightarrow \boxed{x \in \alpha H}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) \subseteq \alpha H}$ (2)

• Από ① και ②: $\boxed{\alpha H = \varphi^{-1}(\{\varphi(\alpha)\})}$

• Ομοίως: $\boxed{H\alpha = \varphi^{-1}(\{\varphi(\alpha)\})}$

• Άρα, αν $H = Ker\varphi$, τότε $\alpha H = H\alpha$, δηλαδή ο πυρήνας είναι κανονική υποομάδα της G, δηλαδή: $\boxed{H = Ker\varphi \trianglelefteq G}$.

Ορισμός | Έστω $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων.

• Αν η απεικόνιση φ είναι "1-1", τότε ο ομομορφισμός φ, καλείται μονομορφισμός!

• Αν η απεικόνιση φ είναι επί, τότε ο ομομορφισμός φ, καλείται επιμορφισμός!

• Αν η απεικόνιση φ είναι "1-1" και επί, τότε ο ομομορφισμός φ, καλείται ισομορφισμός!